Andrzej POWNUK

PRZEDZIAŁOWE METODY CAŁKOWANIA RÓWNAŃ DYNAMIKI KONSTRUKCJI

ABSTRACT

In this paper the interval methods for validated solution of ordinary differential equation of dynamics of structures are presented. The interval Euler's method for solving system of ordinary differential equations with automatic determination of guaranteed estimation and high order Taylor series method are described. Using these methods two problems of free vibration are solved.

1. Wprowadzenie

Całkowanie numeryczne, jest najbardziej uniwersalną i najczęściej stosowaną metodą komputerowej analizy zagadnień dynamicznych [30]. Metody całkowania numerycznego można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej grupy zaliczamy metody, które całkują bezpośrednio równania różniczkowe II rzędu w postaci:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q \tag{1}$$

Najprostszą i najczęściej stosowaną metodą reprezentującą tę grupę jest metoda Newmarka. Do drugiej grupy należą metody, które całkują równania różniczkowe I rzędu postaci:

$$\dot{y} = f(y, t) \tag{2}$$

gdzie $y = [\dot{q}, q]^T$. Najczęściej stosowaną metodą reprezentującą drugą grupę jest metoda Rungego-Kutty IV rzędu.

Rozwiązanie $\widetilde{q}(t)$ otrzymane przy pomocy wyżej opisanych metod jest zawsze obarczone pewnym błędem $e(t)=\left|q(t)-\widetilde{q}(t)\right|$.

Celem pracy jest przedstawienie algorytmów całkowania równań różniczkowych dynamiki konstrukcji opartych na matematyce przedziałowej [1,2,32,33,35] pozwalających na otrzymanie rozwiązania z gwarantowaną pewnością [4,5,10,12,16-24,26,28,29,31,33,34,36,37,39-43,47]. Rozwiązanie uzyskane przy pomocy metod przedziałowych jest dane w postaci:

$$\hat{q}(t)=\left[q^{-}(t),\ q^{+}(t)\right]. \tag{3}$$

Opisane algorytmy gwarantują, że w każdej chwili czasu t rozwiązanie dokładne $q(t)$ należy do przydziału $\hat{q}(t)$ ($q(t)\in\hat{q}(t)$). Przedziałowe metody pozwalają na oszacowanie rozwiązania z dużą dokładnością.

Przedziałowe algorytmy rozwiązywania równań różniczkowych można znaleźć już w pracy [33]. Oszacowania błędu rozwiązania otrzymanego przy użyciu metod wariacyjnych dla równań z operatorami monotonicznymi można znaleźć w pracach [19-21]. Inne metody opierają się na twierdzeniu o punkcie stałym i znajdują oszacowanie rozwiązania w postaci np. wielomianów metodą kolejnych przybliżeń [4,33,42]. Praca [3] zawiera przedziałowy algorytm oparty o metodę Newtona. Praca [36] zawiera metodę konstrukcji oszacowania rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu przy pomocy funkcji sklejanych i MES. Podobną metodę zastosowano w pracy [34] z tym, że do interpolacji użyto funkcji własnych operatora różniczkowego. Artykuł [17] zawiera algorytm oparty o transformację układu współrzędnych (por. [33]). Prace [5,18] zawierają przedziałowe algorytmy oszacowania rozwiązania liniowego układu równań o stałych współczynnikach oparte o macierz fundamentalną rozwiązania. Przedziałowe metody różnicowe oparte o algorytm Adamsa skonstruował O.B. Ermakov [22,23]. Ponadto powstało kilka programów opartych na matematyce przedziałowej, które umożliwiają rozwiązywanie równań różniczkowych z gwarantowaną pewnością. Przykładami takich programów są AWA (iamk4515.mathematik.uni-karlsruhe.de/pub/awa), COSY(bt.nscl.msu.edu/cosy/index), FADBAD (www.imm.dtu.dk/fadbad.html), procedury numeryczne w środowisku programu MAPLE (interval.usl.edu/pub/interval_math/Maple-worksheets) oraz MATHLAB (www.ti3.tu-harburg.de/~zemke/b4m/index.html). Bardziej obszerną literaturę dotyczącą opisywanych metod zawierają prace [11,13,14].

Ponadto istnieje wiele programów komputerowych oraz bibliotek procedur numerycznych opartych na matematyce przedziałowej, które mogą zostać wykorzystane podczas rozwiązywania równań różniczkowych np. ADIFOR (cesdis.gsfc.nasa.gov/hpccm/annual.reports/ann.rpt.95/cas.95/cas.95.ar.adifor.2), PROFIL/BIAS (www.ti3.tu-harburg.de/indexEnglisch) itp. Dokładniejsze informacje na temat matematyki przedziałowej można znaleźć w internecie pod adresem cs.utep.edu/interval-comp/main.

2. Przedziałowy algorytmy rzędu pierwszego

Równanie drgań własnych oscylatora harmonicznego ma postać:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\omega^2 x \\ \dot{x} = v \end{cases} \tag{4}$$

Z twierdzenia Lagrange'a wynika następujący wzór:

$$v(t_1) = v(t_0) + \dot{v}(\xi)\Delta t \in v(t_0) - \omega^2 \hat{x}([t])\Delta t \tag{5}$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \dot{x}(\xi)\Delta t \in x(t_0) + \hat{v}([t])\Delta t \tag{6}$$

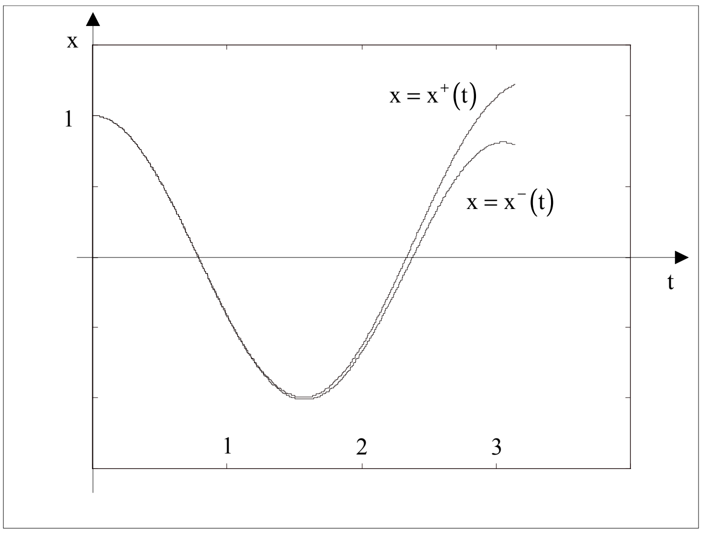
gdzie $\xi \in (t_0, t_1)$, $[t] = [t_0,\ t_1]$.

Proces iteracyjny możemy przeprowadzić według następującego schematu różnicowego:

$$x_{i+1}^- = x_i^- + \left(v_i^- + \Delta v_i^-\right)\Delta t\,,\ x_{i+1}^+ = x_i^+ + \left(v_i^+ + \Delta v_i^+\right)\Delta t \tag{7}$$

$$v_{i+1}^- = v_i^- - \omega^2\left(x_i^+ + \Delta x_i^+\right)\Delta t\,,\ v_{i+1}^+ = v_i^+ - \omega^2\left(x_i^- - \Delta x_i^-\right)\Delta t \tag{8}$$

Wyniki obliczeń przeprowadzone powyższą metodą przedstawione są na rysunku 1. W obliczeniach przyjęto x(0)=1, v(0)=0.



Rys. 1

Zbieżność metody gwarantuje następujący warunek [33]:

$$[x]_{i+1} \subseteq \hat{x}\left([t]_i\right),\ [v]_{i+1} \subseteq \hat{v}\left([t]_i\right) \tag{9}$$

gdzie $[x]_{i+1} = \left[x_{i+1}^-,\ x_{i+1}^+\right]$, $[v]_{i+1} = \left[v_{i+1}^-,\ v_{i+1}^+\right]$, $[t]_i = \left[t_i,\ t_{i+1}\right]$. Metody wielokrokowe rzędu pierwszego przedstawione są w pracach [22,23].

3. Przedziałowy algorytm wyższego rzędu

Moore w pracy [33] podał wzory na metody jednokrokowe wyższych rzędów dla równań postaci:

$$\dot{x} = f(x) \tag{10}$$

gdzie $f\colon R^n \to R^n$. Korzystając z wzoru Taylora możemy napisać:

$$x_i(t) = x_i(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} f_i^{(j-1)}(x_1(0),\ldots,x_n(0))t^j + \frac{1}{k!} f(x_1(\theta),\ldots,x_n(\theta))t^k \tag{10}$$

gdzie $\theta \in [0,\ t]$. Gdy $x(0) = x_0 \in A$ i $\hat{x}([0,\ h]) \subseteq A$ możemy napisać:

$$\hat{x}_i(t) = x_i(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} f_i^{(j-1)}(x_0)t^j + \frac{1}{k!} \hat{f}^{(k)}(A)t^k \tag{12}$$

Obliczenia przeprowadzamy wg niżej opisanego algorytmu. Najpierw obliczamy $A^{(0)} = x_0 + f^{(0)}(x_0)[0,\ h]$, gdy $\hat{x}([0,\ h]) \subseteq A^{(0)}$ przyjmujemy $A^{(1)} = \hat{x}([0,\ h])$ i wartość $\hat{x}(t)$ obliczamy z wzoru (12). W przeciwnym przypadku przyjmujemy $h = \frac{h}{2}$ i powtarzamy cały proces. Kolejne pochodne możemy otrzymać różniczkując funkcję f(x). W oparciu o podobny algorytm działa program AWA napisany przez R.J. Lohner'a z uniwersytetu w Karlsruhe (ftp://iamk4515.mathematik.uni-karlsruhe.de/pub/awa). Obliczenia w tym przypadku przeprowadzane są wg następującego algorytmu [1]:

1) Obliczamy współczynniki rozwinięcia Taylora $(x_0)_i$ stosując metody automatycznego różniczkowania [1,6,7,8,9,10,15,25,27,28,29,38,44-47].
2) Określić stałą $[x_0]$.
3) Określamy krok h dla którego metoda jest zbieżna przy pomocy warunku:

$$[x](t) \subseteq [x_0] \tag{13}$$

4) Określić wartość przedziałowego rozszerzenia reszty wzoru Taylora $([x_0])_p$.
5) Przybliżone rozwiązanie ma postać:

$$[x](t) = \sum_{i=1}^{k-1} (t-t_0)^i (x_0)_i + (t-t_0)^p ([x_0])_p \tag{14}$$

Określamy przy tym rozmiar przedziału $[t_0,\ t^*]$ dla wzór gwarantuje dokładne oszacowanie zbioru rozwiązań.

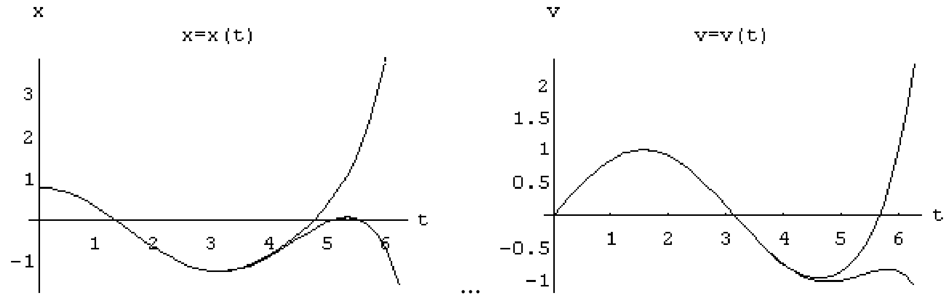
Rozważymy równanie drgań własnych oscylatora harmonicznego (4).

Rozwijając rozwiązanie w szereg Taylora otrzymujemy:

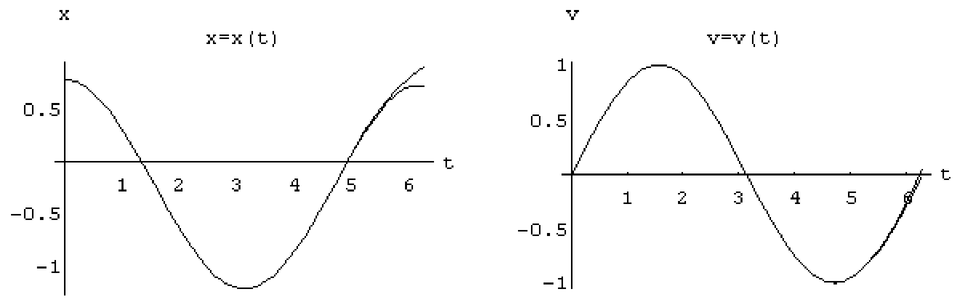
$$x(t) = x_0 + v_0 t + (x_0)_2 t^2 + (x_0)_3 t^3 + (x_0)_4 t^4 + \ldots + (x_0)_{n-1} t^{n-1} + ([x_0])_n t^n \tag{15}$$

gdzie $\left(x_0\right)_2 = \frac{1}{2!}x^{(2)}\left(t_0\right) = -\frac{1}{2}\omega^2 x_0$, $\left(x_0\right)_3 = \frac{1}{3!}x^{(3)}\left(t_0\right) = -\frac{1}{3!}\omega^2 v_0$, itp.

Pochodne możemy obliczyć stosując przedziałowe algorytmy automatycznego różniczkowania. Wyniki obliczeń przedstawione są na rysunku 2 (n=13) i 3 (n=17).



Rys. 2



Rys. 3

W obliczeniach przyjęto $A = [x]\times[v] = [-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$, $x(0) = \frac{\pi}{4}$ i $v(0) = 0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

6. Wnioski

Przedziałowe metody umożliwiają znalezienie oszacowania rozwiązań równań ruchu układów mechanicznych z dużą dokładnością. Wykorzystanie tych metod jest uzasadnione w przypadkach gdy tradycyjne metody numeryczne mogą doprowadzić do otrzymania nieprawidłowych rezultatów. Ponadto przedziałowe metody zostały zastosowane do badania układów o rozwiązaniach periodycznych i chaotycznych [12,28]. Główną zaletą metod przedziałowych jest ich globalna zbieżność, a podstawową wadą duża złożoność obliczeniowa [32]. Liczne programy komputerowe [6,9,26,43,45] czynią z przedziałowych metod całkowania równań dynamiki narzędzie, które może zostać zastosowane do rozwiązywania praktycznych problemów inżynierskich [18,25].

Praca została wykonana w ramach grantu KBN Nr 8T11F00615 pt. „Przedziałowe i jakościowe metody modelowania niepewności w układach fizycznych”.

Literatura

[1] Alefeld G., Frommer A., Lang B., „Scientific Computing and Validated Numerics”, Academie Verlag, Berlin, 1996

[2] Alefeld G., Herzberger J., Introduction to Interval Computation. Academic Press, New York, 1983

[3] Allgower E.L., Mccormick S.T., Pryor D.V., „A General Mesh Independence Principle for Newton's Method Applied to Second Order Boundary Value Problems”, Computing, 23, 1979, s.233-246

[4] Bauch H., „On the Itertive Inclusion of Solutions in Initial-Value Problems for Ordinary Differential Equations”, Computing 22, 1979, s.339-354

[5] Bauch H., Kimmel W., „Solving Ordinary Initial Value Problems with Guaranteed Bounds”, ZAMM, 69, 1989, s.110-112

[6] Bendtsen C., Stauning O., „FADBAD, a flexible C++ package for automatic differentiation”, Technical University of Denmark. 1996, 37 s. (materiał z sieci Internet)

[7] Bischof Ch., Carle A., Corliss G., Griewank A., Hovland P., „ADIFOR-Generating Derivative Codes from Fortran Programs”, 22 s. (materiał z sieci Internet)

[8] Bischof Ch., Corliss G., Green L., Griewank A., Haigler K., Newman P., „Automatic differentiation of advanced cfd codes for multidisciplinary design”, 6 s. (materiał z sieci Internet)

[9] Bischof Ch., Corliss G., Griwwank A., „ADIFOR: Automatic Differentiation in a Source Translator Environment”, 8 s. (materiał z sieci Internet)

[10]Bischof Ch., Whiffen G.J.,Shoemaker C.A., Carle A., Ross A.A., „Application of automatic differentiation to grundwater transport models”, 8 s. (materiał z sieci Internet)

[11]Corliss G.F., „Automatic Differentiation Bibliography”, (materiał z sieci Internet)

[12]Corliss G.F., „Guaranteed Error Bounds for Ordinary Differential Equation”, VI-th SERC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, July 1994, 58 s.

[13]Corliss G.F., „Selected Validated ODE Bibliography”,(materiał z sieci Internet) 7s.

[14]Corliss G.F., „Survey of Interval Algorithms for Ordinary Differential Equations”, Applied Mathematics and Computation. 31, 1989, s.112-120

[15]Corliss G.F., Rall L., „Bounding derivative ranges”, Marquette University. 1998, 6 s., (materiał z sieci Internet)

[16]Corliss G.F., Rihm R., „Validating an A Priori Enclosure Using High-Order Taylor Series”, In Scientific Computing and Validated Numerics. Alefeld G., Frommer A., Lang B., Akademie Verlag, Berlin 1996

[17]Davey D.P., Stewart N.F., „Guaranteed Error Bounds for the Initial Value Problems using Polytope Artihmetic”, BIT 16,1976 s.257-268

[18]Dimarogonas A.D., „Interval Analysis of Vibrating Systems", Journal of Sound and Vibration, 183, 1995 s.739-749
[19]Dobronets B.S., „A Posteriori Error Estimation and Corrected Solution of Partial Differantial Equations", APIC'95, 1995
[20]Dobronets B.S., „Numerical methods using defects", Reliable Computing 1, 4, 1995, s.383-391
[21]Dobronets B.S., „On Some Two-Sided Methods for Solving Systems of Ordinary Differential Equations", Interval Computations, 1, 3, 1992, s.6-21
[22]Ermakov O.B., „Solving Systems of Ordinary Differential Equations Using Adams Interpolation Method with Guaranteed Accuracy", Interval Computations, 1994
[23]Ermakov O.B., „Two-Sides Method for Solving System of Ordinary Differrential Equations with Automatic Determination of Guaranteed Estimation", Interval Computations, 3, 5, 1992, s.63-69
[24]Figueiredo L.H., Stolfi J., Self-Validated Numerical Methods and Applications, Brazilian Mathematics Colloquium monograph, IMPA, Rio de Janeiro, 1997
[25]Hammer R., Hocks M., Kulisch U., Ratz D., Numerical Toolbox for Verified Computing I. Basic Numerical Problems. Springer-Verlag, Berlin 1993
[26]Hickey T.J., „CLP(F) and Constrained ODEs. Mitchom School of Computer Science, Volen Center for Complex Systems", Brandeis University 1994, 11 s. (materiał z sieci Internet)
[27]Kearfott R.B., „Automatic Differentiation Enhancements and other Miscellancous Enhancements", Rigorous Global Search Working Note 12, 1997, 8 s. (materiał z sieci Internet)
[28]Kearfott R.B., „Automatic Verification of Dynamical System Properties. Department of Mathematics", University of Southwestern Louisiana. 1997, 29 s. (materiał z sieci Internet)
[29]Kearfott R.B., Kreinovich V., Applications of Interval Computations, Kluwer Academic Publishers, London, 1996
[30]Kleiber M.(red.), Mechanika Techniczna. Tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. PWN Warszawa, 1995
[31]Kolev L.V., „Interval Methods for Circuit Analysis", World Scientific, Singapore, 1993
[32]Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P., Computatioal Complexity Feasibility of Data Processing and Interval Computations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998
[33]Moore R.E., Interval Analysis, Prentice-Hall, New Jersey 1966
[34]Neher M., „Enclosing Solutions of Inverse Strum-Liouville Problem with Finite Data", Computing 53, 1994, s.379-395
[35]Neumaier A., Interval methods for systems of equations, Cambridge University Press, New York 1990

[36]Nickel K., „The Construction of a priori Bounds for Solution of a Two Point Boundary Value Problem with Finite Element I", Computing 23, 1979, s.247-265
[37]Older W.J., „Application of Relational Interval Arithmetic to Ordinary Differential Equations", Computing Research Laboratory Bell Northon Resesrch, 1994, 9 s. (materiał z sieci Internet)
[38]Rall L.B., „Automatic Differentiation: point and interval", AD Marquette University. 1997, 6 s., (materiał z sieci Internet)
[39]Schwandt H., „Almost Globally Convergent Interval Methods for Discertizations of Nonlinear Eliptic Partial Differential Equations", SIAM Journal on Numerical Analysis, 23, 2, 1986, s.304-324
[40]Schwandt H., „An interval arithmetic domain decomposition method for a class of elliptic PDEs on nonrectangular domains", Journal of Computational and Applied Mathematics, 50, 1994, s.509-521
[41]Shieh Ch.S., Tsai J.S.H., Sun Y.Y., 1999, „Digital modeling and hybryd control of sampled-data uncertain system with input time delay using the low of mean", Applied Mathematical Modelling, vol. 23, No. 1, s.131-152
[42]Sivasundaram S., Sun Y., „Application of Interval Analysis to Impulse Differential Equations", Applied Mathematics and Computation, 47, 1992, s.201-210
[43]Stauning O., „ADIODES, a Self-Validating ODE Solver. Technical University of Denmark", 1998, 21 s., (materiał z sieci Internet)
[44]Stauning O., „Automatic Differentiation in Theory and Praktice. Technical University of Denmark", 1996, 15 s., (materiał z sieci Internet)
[45]Stauning O., „Introduction to FADBAD, a C++ program package for automatic differentiation Technical University of Denmark", 1997, 15 s. (materiał z sieci Internet)
[46]Stauning O., „Obtaining 2.nd Order Derivatives Using a Mixed Forward and Backward Automatic Differentiation Strategy for use in Interval Optimization." Technical University of Denmark, 1996, 5 s., (materiał z sieci Internet)
[47]Walters J.B., Corliss G.F., „Automatic Differentiation: point and interval Taylor operators", Marquette University, 1997, 6 s., (materiał z sieci Internet)

Andrzej Pownuk, mgr inż., Politechnika Śląska, Katedra Mechaniki Teoretycznej, ul. Krzywoustego 7, 44-100, Gliwice, tel. (032) 237 15 42, fax. (032) 237 15 42, e-mail: pownuk@zeus.polsl.gliwice.pl.